УДК 517.521

О ЧАСТИЧНЫХ СУММАХ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Л.Д. Гоголадзе, В.Ш. Цагарейшвили

Аннотация

Банах [Sur la divergence des séries orthogonales // Studia Math. – 1940. – V. 9. – P. 139–155] доказал, что для любой функции $f \in L_2(I)$, $I = [0,1]$ $(f(x) \not\sim 0)$ существует ортонормированная система (ОНС) $(\varphi_n(x))$ такая, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |S_N(f,x)| = +\infty$ почти всюду на I, где $S_N(f,x)$ – частичные суммы ряда Фурье функции $f(x)$.

В настоящей статье найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы частичные суммы любой функции с конечным изменением были равномерно ограничены на I.

Ключевые слова: ограниченная вариация, частичные суммы, подсистема.

Как обычно, через $V(I)$, $I = [0,1]$, обозначается пространство функций с конечным изменением с нормой

$$\|f\|_V = \int\limits_0^1 |f'(x)|\,dx + |f(0)|.$$

Пусть $f \in L(I)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_n(f)\varphi_n(x) \tag{1}$$

является рядом Фурье для f по ОНС $(\varphi_n(x))$, $\widehat{\varphi}_n(f) = \int\limits_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx$ – коэффициенты Фурье, $S_N(f,x) = \sum\limits_{n=1}^{N} \widehat{\varphi}_n(f)\varphi_n(x)$ есть частная сумма ряда (1).

Пусть далее $D_N(t,x) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(t)\varphi_n(x)$ – ядро Дирихле. Положим

$$B_N(x) = \max_{1\le i\le N} \left| \int\limits_0^{i/N} D_N(t,x)\,dt \right|. \tag{2}$$

Определение 1. Скажем, что ОНС Φ обладает свойством A, если существует такая положительная константа $C(\Phi)$, зависящая лишь от системы Φ, что

$$\sup_{x\in I} N^{-1} \sum_{n=1}^{N} \varphi_n^2(x) \le C(\Phi). \tag{3}$$

Лемма 1. *Пусть f, g и $fg \in L(I)$ и f принимает конечные значения в каждой точке сегмента I. Тогда справедливо равенство*

$$\int_0^1 f(t)g(t)\,dt = \sum_{k=1}^{N-1}\left(f\left(\frac{k}{N}\right) - f\left(\frac{k+1}{N}\right)\right)\int_0^{k/N} g(t)\,dt + \\ + \sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)/N}^{k/N}\left(f(t) - f\left(\frac{k}{N}\right)\right)g(t)\,dt + f(1)\int_0^1 g(t)\,dt. \quad (4)$$

Доказательство. Используя преобразование Абеля, будем иметь

$$0 = \sum_{k=1}^{N-1}\left(f\left(\frac{k}{N}\right) - f\left(\frac{k+1}{N}\right)\right)\int_0^{k/N} g(t)\,dt - \\ - \sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right)\int_{(k-1)/N}^{k/N} g(t)\,dt + f(1)\int_0^1 g(t)\,dt.$$

Отсюда в силу того, что

$$\int_0^1 f(t)g(t)\,dt = \sum_{k=1}^{N}\int_{k-1/N}^{k/N} f(t)g(t)\,dt,$$

получим (4). □

Определение 2. Говорят, что частичные суммы ряда Фурье функции f по системе Φ равномерно ограничены, если существует такая положительная константа $C(f,\Phi)$, зависящая лишь от функции f и системы Φ, что

$$|S_N(f,x)| < C(f,\Phi) \quad (5)$$

для любого $x \in I$ и натурального N.

Теорема 1. *Пусть ОНС Φ обладает свойством A. Тогда для того чтобы для любой функции $f \in V(I)$ частичные суммы ряда Фурье f относительно Φ были равномерно ограничены, необходимо и достаточно существование такой положительной константы $M(\Phi)$, зависящей лишь от системы Φ, что*

$$\sup_{N\geq 1}\sup_{x\in I} B_N(x) < M(\Phi). \quad (6)$$

Доказательство. Так как для любого $x \in I$

$$S_N(f,x) = \int_0^1 f(t)D_N(t,x)\,dt,$$

то полагая в равенстве (4) $g(t) = D_N(t,x)$, получим

$$S_N(f,x) = \int_0^1 f(t)D_N(t,x)\,dt = \sum_{k=1}^{N-1}\left(f\left(\frac{k}{N}\right) - f\left(\frac{k+1}{N}\right)\right)\int_0^{k/N} D_N(t,x)\,dt + \\ + \sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)/N}^{k/N}\left(f(t) - f\left(\frac{k}{N}\right)\right)D_N(t,x)\,dt + f(1)\int_0^1 D_N(t,x)\,dt. \quad (7)$$

Отсюда принимая во внимание (2), (6) и то, что $f \in V(I)$, будем иметь

$$\left|\sum_{k=1}^{N-1}\left(f\left(\frac{k}{N}\right)-f\left(\frac{k+1}{N}\right)\right)\int_0^{k/N} D_N(t,x)\,dt\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{N-1}\left|f\left(\frac{k}{N}\right)-f\left(\frac{k+1}{N}\right)\right|\left|\int_0^{k/N} D_N(t,x)\,dt\right| \le$$

$$\le \|f\|_V \max_{1\le k<N}\left|\int_0^{k/N} D_N(t,x)\,dt\right| \le \|f\|_V\cdot M(\Phi). \quad (8)$$

Далее, в силу условия теоремы 1 для $f \in V(I)$ имеем (см. (3))

$$\left|\sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)/N}^{k/N}\left(f(t)-f\left(\frac{k}{N}\right)\right)D_N(t,x)\,dt\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{N}\sup_{x\in[(k-1)/N,k/N]}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{N}\right)\right|\int_{(k-1)/N}^{k/N}|D_N(t,x)|\,dt \le$$

$$\le \|f\|_V\cdot\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\int_0^1 D_N^2(t,x)\,dt\right)^{1/2} = \frac{\|f\|_V}{\sqrt{N}}\left(\sum_{k=1}^{N}\varphi_k^2(x)\right)^{1/2} \le \|f\|_V\cdot\sqrt{C(\Phi)}. \quad (9)$$

Поскольку (см. (2))

$$|f(1)|\left|\int_0^1 D_N(t,x)\,dt\right| \le \|f\|_C\cdot B_N(x) \le \|f\|_C\cdot M(\Phi),$$

то из последнего неравенства, учитывая (7)–(9), получим

$$|S_N(f,x)| \le \left(M(\Phi)+\sqrt{C(\Phi)}\right)\|f\|_V + \|f\|_C M(\Phi).$$

Достаточность теоремы 1 доказана.

Необходимость. Дано, что для любой функции $f \in V(I)$ выполнено неравенство (5), и надо доказать справедливость неравенства (6). Допустим противное, тогда для некоторых последовательностей натуральных чисел (N_m) и точек $x_m \in I$ будем иметь

$$\lim_{m\to\infty} B_{N_m}(x_m) = +\infty. \quad (10)$$

Предположим, что

$$B_{N_m}(x_m) = \max_{1\le k\le N_m}\left|\int_0^{k/N} D_{N_m}(t,x_m)\,dt\right| = \left|\int_0^{k_m/N_m} D_{N_m}(t,x_m)\,dt\right|.$$

Определим последовательность функций $(f_m(t))$ следующим образом

$$f_m(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x\in[0,\,k_m/N_m]\,, \\ 1 \quad \text{при } x\in[k_m+1/N_m,\,1]\,, \\ \text{линейна и непрерывна на } [k_m/N_m,\,k_m+1/N_m]. \end{cases}$$

В равенстве (7) допустим, что $f(t) = f_m(t)$, $N = N_m$ и $D_N(t,x) = D_{N_m}(t,x_m)$. Получим

$$\int_0^1 f_m(t) D_{N_m}(t,x_m)\,dt = \sum_{k=1}^{N_m-1}\left(f_m\left(\frac{k}{N_m}\right) - f_m\left(\frac{k+1}{N_m}\right)\right)\int_0^{k/N_m} D_{N_m}(t,x_m)\,dt +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N_m}\int_{(k-1)/N_m}^{k/N_m}\left(f_m(t) - f_m\left(\frac{k}{N_m}\right)\right) D_{N_m}(t,x_m)\,dt + f_m(1)\int_0^1 D_{N_m}(t,x_m)\,dt. \quad (11)$$

Из определения функции $f_m(t)$ для первого слагаемого из (11) имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{N_m-1}\left(f_m\left(\frac{k}{N_m}\right) - f_m\left(\frac{k+1}{N_m}\right)\right)\int_0^{k/N_m} D_{N_m}(t,x_m)\,dt\right| =$$
$$= \left|\int_0^{k_m/N_m} D_{N_m}(t,x_m)\,dt\right| = B_{N_m}(x_m). \quad (12)$$

Так как $|f_m(t) - f_m(k/N_m)| = 0$ при $t \in [(k-1)/N_m,\, k/N_m]$ и $k \neq k_m + 1$, для второго слагаемого равенства (11) получим

$$\left|\sum_{k=1}^{N_m}\int_{(k-1)/N_m}^{k/N_m}\left(f_m(t) - f_m\left(\frac{k}{N_m}\right)\right) D_{N_m}(t,x_m)\,dt\right| \leq$$
$$\leq \int_{k_m/N_m}^{(k_m+1)/N_m} |D_{N_m}(t,x_m)|\,dt \leq \frac{1}{\sqrt{N_m}}\left(\sum_{k=1}^{N_m}\varphi_k^2(x_m)\right)^{1/2} \leq \sqrt{C(\Phi)}. \quad (13)$$

Поскольку $1 \in V(I)$ и неравенство (5) выполнено для любых $f \in V(I)$, будем иметь

$$\left|\int_0^1 D_{N_m}(t,x_m)\,dt\right| \leq C(1,\Phi),$$

где $C(1,\Phi)$ – положительная константа, зависящая только от системы Φ.

Следовательно, применяя (11)–(13), получим

$$\left|\int_0^1 f_m(t) D_{N_m}(t,x_m)\,dt\right| \geq B_{N_m}(x_m) - \sqrt{C(\Phi)} - C(1,\Phi).$$

Отсюда в силу (10)

$$\lim_{m\to\infty}\left|\int_0^1 f_m(t) D_{N_m}(t,x_m)\,dt\right| = +\infty. \quad (14)$$

Теперь, поскольку

$$\|f_m\|_V = \int_0^1 |f'_m(t)|\,dt + |f_m(0)| = 1,$$

из (14) согласно теореме Банаха – Штейнгауза вытекает существование функции f_0 из $V(I)$ такой, что

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\left|\int_0^1 f_0(t)D_{N_m}(t,x_m)\,dt\right| = +\infty.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\,|S_{N_m}(f_0,x_m)| = +\infty.$$

Это противоречит неравенству (5). □

Аналогичный вопрос можно поставить относительно (C,α)-суммируемости ряда (1) в смысле Чезаро для функций $f(x)\in V(I)$.

Положим, что (см. [2, с. 77])

$$K_N^\alpha(t,x) = \frac{1}{A_N^\alpha}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\alpha \varphi_k(t)\varphi_k(x),$$

где $A_N^\alpha = \binom{N+\alpha}{N}$ и $\alpha > 0$.

Кроме того,

$$\sigma_N^\alpha(f,x) = \int_0^1 f(t)K_N^\alpha(t,x)\,dt.$$

Введем обозначение

$$H_N^\alpha(x) = \max_{1\le i\le N}\left|\int_0^{i/N} K_N^\alpha(t,x)\,dt\right|.$$

Теорема 2. *Пусть ОНС Φ обладает свойством A. Тогда условие*

$$|\sigma_N^\alpha(f,x)| < M < +\infty$$

для любой функции $f\in V(I)$ и любого натурального N выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sup_{x\in I} H_N^\alpha(x) < M_1(\Phi) < +\infty,$$

где $M>0$ не зависит от N и x, $M_1(\Phi)>0$ зависит лишь от Φ, $\alpha>0$ – фиксированное число.

Доказательство. Теорема 2 доказывается аналогично теореме 1. В самом деле, в равенстве (4) подставляя $g(t) = K_N^\alpha(x,t)$ и проводя аналогичные рассуждения (см. (6)–(9)), получим

$$|\sigma_N^\alpha(f,x)| \le M_1(\Phi)\|f\|_V + M_1(\Phi)\|f\|_C + \|f\|_V\sqrt{M_1(\Phi)}\,.$$

Достаточность теоремы 2 доказана.

Необходимость. Пусть для некоторых последовательностей натуральных чисел N_m и точек $x_m\in I$

$$\lim_{m\to\infty} H_{N_m}(x_m) = +\infty.$$

В этом случае мы рассмотрим последовательность функций $\{f_m\}$ (см. с. 123). Проводя аналогичные рассуждения, получим, что существует функция $f_0\in V(I)$ такая,что

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\,|\sigma_{N_m}^\alpha(f_0,x_m)| = +\infty.$$

Теорема 2 полностью доказана. □

Теорема 3. *Пусть* $\{\varphi_n\}$ *– ОНС и* $\sup\limits_n \sup\limits_{x\in[0,1]} |\varphi_n(x)| < M$. *Тогда из системы* $\{\varphi_n\}$ *можно выделить подсистему* $\varphi_{n_k} = \psi_k$, *относительно которой частные суммы каждой функции* $f \in V(I)$ *равномерно ограничены.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n^*\}$ (ОНС) является полной системой, являющейся пополнением системы $\{\varphi_n\}$. Тогда в силу равенства Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x \varphi_n^*(t)\,dt\right)^2 = x.$$

Так как члены этого ряда положительны, непрерывны и его сумма непрерывна, то в силу теоремы Дини (см. [3, с. 647]) этот ряд будет сходиться равномерно. Отсюда вытекает, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x \varphi_n(t)\,dt\right)^2 \tag{15}$$

также будет сходиться равномерно. Следовательно, для любого N найдется $k(N)$ такое, что

$$\sum_{n=k(N)}^{\infty}\left(\int_0^x \varphi_n(t)\,dt\right)^2 < 2^{-3N}.$$

Отсюда

$$\left|\int_0^x \varphi_n(t)\,dt\right| < 2^{-3N/2} \quad \text{при} \quad n > k(N). \tag{16}$$

Последовательность чисел $k(N)$ выберем так, чтобы кроме условия (16) она удовлетворяла еще следующим условиям:

$$k(1) \geq 2,$$
$$k(N+1) > k(N) + 2^N.$$

Теперь подсистему $\{\psi_n(x)\}$ выделим из системы $\{\varphi_n(x)\}$ следующим образом

$$\begin{aligned}
&\psi_1(x) = \varphi_1(x),\\
&\psi_2(x) = \varphi_2(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\psi_{2^N+j} = \varphi_{k(N)+j}, \quad j = 1, 2, \ldots, 2^N, \quad N = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\left|\int_0^x \psi_{2^N+j}(t)\,dt\right| \leq 2^{-3N/2}, \quad x \in [0,1]. \tag{17}$$

Учитывая (17) и условие $|\varphi_n(x)| < M$, для любого $i = 1, \ldots, 2^N$ получим

$$\left|\int_0^x \sum_{k=1}^{2^N} \psi_k(x)\psi_k(t)\,dx\right| = \int_0^x \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \psi_k(x)\psi_k(t)\,dx\Bigg| \;\leq$$
$$\leq \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \left|\int_0^x \psi_k(x)\,dx\right| |\psi_k(t)| \leq M \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} 2^{-3N/2} < 2M. \tag{18}$$

Теперь используя неравенства (18) и (17), для любого $m = 2^s + l$, $l < 2^s$, будем иметь

$$\Bigl|\int\limits_0^{i/m}\sum_{k=1}^{m}\psi_k(x)\psi_k(t)\,dx\Bigr| \le \Bigl|\int\limits_0^{i/m}\sum_{k=1}^{2^s}\psi_k(x)\psi_k(t)\,dx\Bigr|$$
$$+\Bigl|\int\limits_0^{i/m}\sum_{k=2^s+1}^{m}\psi_k(x)\psi_k(t)\,dx\Bigr| \le 2M + \sum_{i=2^s+1}^{m}\Bigl|\int\limits_0^{i/m}\psi_k(x)\,dx\Bigr|\,|\varphi_k(t)| < 4M.$$

Из этого неравенства и теоремы 1 следует справедливость теоремы 3. □

Эффективность условия теоремы 1

В случае, когда $\{\varphi_n(x)\}$ – тригонометрическая система (см. [4, с. 107, 108]), будем иметь

$$\mathcal{D}_N(2\pi u) = \frac{\sin 2\pi N u}{2\pi u} + g(2\pi u)\sin 2\pi N u + \frac{1}{2}\cos 2\pi N u,$$

где

$$g(2\pi u) = \frac{1}{2\operatorname{tg}\pi u} - \frac{1}{2\pi u}\,.$$

Потребуем еще, чтобы $g(2\pi u - 2\pi) = g(2\pi u)$. Тогда $g(2\pi u)$ будет ограничен на $(-\infty; +\infty)$.

Далее, поскольку для тригонометрической системы $D_N(t,x) = D_N(2\pi(x+t))$, то

$$\Bigl|\int\limits_0^{i/N} D_N(2\pi(x+t))\,dt\Bigr| \le \Bigl|\int\limits_0^{i/N}\frac{\sin 2\pi N(x+t)}{2\pi(x+t)}\,dt\Bigr| + \Bigl|\int\limits_0^{i/N} g(2\pi(x+t))\sin 2\pi N(x+t)\,dt\Bigr| +$$
$$+\Bigl|\int\limits_0^{i/N}\cos 2\pi N(x+t)\,dt\Bigr| = I_1 + I_2 + I_3, \quad i = 1,\dots,n.$$

Ввиду того, что функции g, $\sin$ и $\cos$ ограничены, I_2 и I_3 будут ограничены положительной константой, не зависящей от x и N. Далее, заменой переменной получим (см. [4, с. 113])

$$I_1 = \Bigl|\int\limits_0^{i/N}\frac{\sin 2\pi N(x+t)}{2\pi(x+t)}\,dt\Bigr| = \Bigl|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi N x}^{2\pi N x + 2\pi i}\frac{\sin u}{u}\,dt\Bigr| < \frac{1}{2}\,.$$

Итак, в случае тригонометрической системы выполнено условие (6).

Пусть $\{\chi_m(x)\}$ – система Хаара. Тогда для $N = 2^k + p$, $1 \le p < 2^N$,

$$D_N(x,t) = \sum_{n=1}^{2^k}\chi_n(t)\chi_n(x) + \sum_{n=2^k+1}^{2^k+p}\chi_n(x)\chi_n(t). \tag{19}$$

Хорошо известно (см. [2, с. 56]), что

$$D_{2^k}(x,t) = \sum_{n=1}^{2^k}\chi_n(t)\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k+1}, & \text{если } (x,t)\in\Delta_{ii}^{(k)},\\ 0, & \text{если } (x,t)\in\Delta_{ij}^{(k)},\ i\ne j,\\ 2^k, & \text{если } (x,t)\in\overline{\Delta}_{ii}^{(k)}\setminus\Delta_{ii}^{(k)},\end{cases}$$

где
$$\Delta_{ij}^{(k)} = \left(\frac{i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^{k+1}}\right) \times \left(\frac{j-1}{2^{k+1}}, \frac{j}{2^{k+1}}\right), \quad i,j = 1,\dots,2^{k+1}.$$

Поэтому для любого $x \in (0,1)$ и $i = 1,\dots,N$ будем иметь

$$\left|\int_0^{i/N} \sum_{n=1}^{2^k} \chi_n(x)\chi_n(t)\,dt\right| \le 2^{k+1}2^{-k+1} = 2. \tag{20}$$

Кроме того,

$$\left|\int_0^{i/N} \sum_{n=2^k+1}^{2^k+p} \chi_n(x)\chi_n(t)\,dt\right| \le 2^{-k/2}2^{k/2} = 1. \tag{21}$$

Из (19)–(21) следует справедливость (6) для системы Хаара.

Summary

L.D. Gogoladze, V.Sh. Tsagareishvili. On the Partial Sums of the Fourier Series of Functions of Bounded Variation.

S. Banach [Sur la divergence des séries orthogonales. *Studia Math.*, 1940, vol. 9, pp. 139–155] proved that for any function $f(x) \in L_2(I)$ $(I = [0,1],\ f(x) \not\sim 0)$ there exists an orthonormal system (ONS) $(\varphi_n(x))$ such that $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |S_n(f,x)| = +\infty$ almost everywhere on I, where $S_n(f,x)$ are the partial sums of the Fourier series of a function $f(x)$ with respect to the system $(\varphi_n(x)) = \Phi$.

This paper finds necessary and sufficient conditions which should be satisfied by ONS so that the partial sums of the Fourier series of functions with finite variation be uniformly bounded on I.

Key words: bounded variation, partial sums, subsystem.

Литература

1. *Banach S.* Sur la divergence des séries orthogonales // Studia Math. – 1940. – V. 9. – P. 139–155.
2. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 359 с.
3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Наука, 1969. – 800 с.
4. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

Поступила в редакцию
15.03.12

Гоголадзе Лери Давидович – доктор физико-математических наук, профессор департамента математики Тбилисского государственного университета им. И. Джавахишвили, Грузия.

E-mail: *lgogoladze1@hotmail.com*

Цагарейшвили Вахтанг Шалвович – доктор физико-математических наук, профессор департамента математики Тбилисского государственного университета им. И. Джавахишвили, Грузия.

E-mail: *cagare@ymail.com*